第 44 講　二項係数

44　二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$（n は自然数，k は整数で $0 \leqq k \leqq n$）に関して，次の各問いに答えよ．

（1）${}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ を示せ．また，$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ を示せ．

（2）${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．
また，${}_n\mathrm{C}_0{}^2 + {}_n\mathrm{C}_1{}^2 + {}_n\mathrm{C}_2{}^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}{}^2 + {}_n\mathrm{C}_n{}^2$ を簡単にせよ．

（3）${}_n\mathrm{C}_1 + 2\,{}_n\mathrm{C}_2 + 3\,{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (n-1)\,{}_n\mathrm{C}_{n-1} + n\,{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

（4）${}_n\mathrm{C}_0 + \dfrac{1}{2}\,{}_n\mathrm{C}_1 + \dfrac{1}{3}\,{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n}\,{}_n\mathrm{C}_{n-1} + \dfrac{1}{n+1}\,{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　二項係数

44　$n \geqq 2$ のとき，$1\cdot 2\cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 2\cdot 3\cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (n-2)(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1} + (n-1)n\,{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

【選択肢】

㋐　$n^2 2^{n-1}$　　㋑　$n(n-1)2^{n-2}$　　㋒　$n(n+1)2^{n+2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　二項係数

44　二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$（n は自然数，k は整数で $0\leqq k\leqq n$）に関して，次の各問いに答えよ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{C}_{k+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$ $(0\leqq k\leqq n-1)$ を示せ．また，$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(1\leqq k\leqq n)$ を示せ．

(2)　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．
また，${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}{}^2+{}_n\mathrm{C}_n{}^2$ を簡単にせよ．

(3)　${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1}+n{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

(4)　${}_n\mathrm{C}_0+\dfrac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_1+\dfrac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}{}_n\mathrm{C}_{n-1}+\dfrac{1}{n+1}{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

【答】（1）略　（2）順に 2^n，$\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$　（3）$n2^{n-1}$　（4）$\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

【解答】

(1)　${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ より

$$
\begin{aligned}
&{}_n\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{C}_{k+1}-{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}\\
&=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\{n-(k+1)\}!}-\frac{(n+1)!}{(k+1)!\{(n+1)-(k+1)\}!}\\
&=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}-\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&=\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\{(k+1)+(n-k)-(n+1)\}=0
\end{aligned}
$$

となるので ${}_n\mathrm{C}_k+{}_n\mathrm{C}_{k+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$ である．

また

$$
\begin{aligned}
k{}_n\mathrm{C}_k-n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}&=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}-n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}\\
&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}-\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=0
\end{aligned}
$$

となるので $k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ である．

(2)　$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^n-1+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ において $x=1$ を代入することで

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n=\mathbf{2^n}$ を得る．

また

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^n-1+{}_n\mathrm{C}_nx^n\quad\cdots\cdots①$$

と

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x+{}_n\mathrm{C}_{n-2}x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_1x^n-1+{}_n\mathrm{C}_0x^n\quad\cdots\cdots②$$

の辺々の積をとったときの x^n の係数に注目すると，

$(1+x)^n\cdot(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ の展開式における x^n の係数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ であり，

①と②の右辺の積の x^n の係数は ${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}{}^2+{}_n\mathrm{C}_n{}^2$ となるので

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}{}^2+{}_n\mathrm{C}_n{}^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$$
$$=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}$$
$$=\boldsymbol{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

(3)　$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を用いると

$${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1}+n{}_n\mathrm{C}_n=\sum_{k=1}^{n}k{}_n\mathrm{C}_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$
$$=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k$$
$$=\boldsymbol{n2^{n-1}}$$

(4)　$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ より得られる $\dfrac{1}{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}=\dfrac{1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k$ を用いると

$${}_n\mathrm{C}_0+\frac{1}{2}{}_n\mathrm{C}_1+\frac{1}{3}{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}{}_n\mathrm{C}_{n-1}+\frac{1}{n+1}{}_n\mathrm{C}_n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k-{}_{n+1}\mathrm{C}_0\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　二項係数

44　$n \geqq 2$ のとき，$1\cdot 2\cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 2\cdot 3\cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (n-2)(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1} + (n-1)n{}_n\mathrm{C}_n$ を簡単にせよ．

【選択肢】

㋐　$n^2 2^{n-1}$　　㋑　$n(n-1)2^{n-2}$　　㋒　$n(n+1)2^{n+2}$

【答】　㋑

【解答】

$k{}_n\mathrm{C}_k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を用いると

$$1\cdot 2\cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 2\cdot 3\cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (n-2)(n-1){}_n\mathrm{C}_{n-1} + (n-1)n{}_n\mathrm{C}_n$$

$$= \sum_{k=2}^{n}(k-1)k{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=2}^{n}(k-1)n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1){}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

となり，さらに $(k-1){}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = (n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を用いると

$$n\sum_{k=2}^{n}(k-1){}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=2}^{n}(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$

$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$

$$= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-2}\mathrm{C}_{k}$$

$$= \boldsymbol{n(n-1)2^{n-2}}$$

となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。